1. On note u_n la distance parcourue par le caillou entre le n-ième rebond et le $(n+1)$-ième rebond.

On a $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique
de raison $q = \frac{1}{2}$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La distance totale parcourue par le caillou au moment du 20e rebond est :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{19}$$

$$= 2 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

$$= 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

$S = 3{,}9\,999\,962$

Le caillou a parcouru environ 4 mètres.

2. La distance totale parcourue par le caillou au moment du n-ième rebond est :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

$$= 2 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

3. Pour un très grand nombre de rebonds, la distance totale parcourue par le caillou se rapproche de 4 mètres.